MATHEMATIQUE - CORRECTIF
Dossier de révisions pour l'examen de juin – 3e année

Dossier mis en ligne le 21 mars 2020.

3UAA1 : FIGURES ISOMÉTRIQUES ET FIGURES SEMBLABLES

Séquence 2 : LES FIGURES ISOMÉTRIQUES

Je dois connaître :

DÉFINITION D'UNE ISOMÉTRIE :

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les mesures.

DÉFINITION DE DEUX FIGURES ISOMÉTRIQUES :

Deux figures isométriques sont deux figures images l'une de l'autre par une isométrie.

PROPRIÉTÉS DE DEUX FIGURES (OU DE DEUX TRIANGLES) ISOMÉTRIQUES :

Deux figures isométriques ont leurs côtés homologues de même longueur et leurs angles homologues de même amplitude.

CRITÈRES D'ISOMÉTRIE DE DEUX TRIANGLES QUELCONQUES :

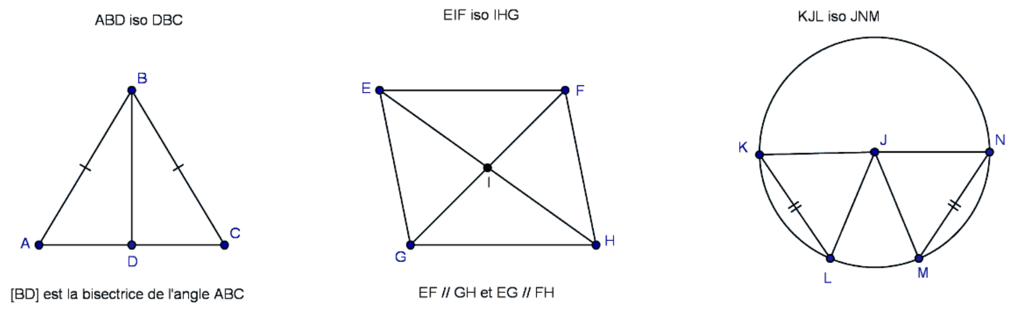
Deux triangles qui ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés deux à deux de même longueur sont isométriques. (CAC)

Deux triangles qui ont un côté de même longueur adjacent à deux angles deux à deux de même amplitude sont isométriques. (ACA)

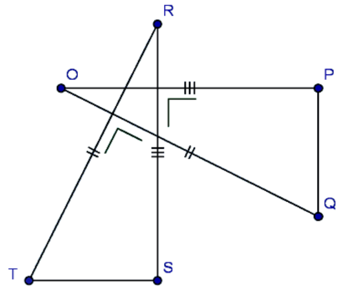
Deux triangles qui ont trois côtés deux à deux de même longueur sont isométriques. (CCC)

Je dois appliquer :

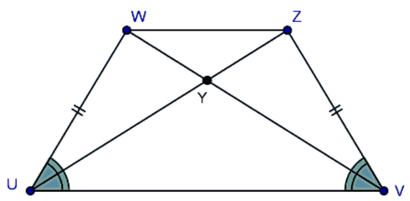
1) Observe attentivement les notations sur les figures.
Justifie que les triangles donnés sont isométriques en énonçant le cas utilisé.
(Attention à l'ordre des sommets homologues)



OPQ iso RTS



UWY iso ZUV



a) $|AB| = |BC|$ par hypothèse

$|\widehat{ABD}| = |\widehat{DBC}|$ car BD bissectrice de $\hat{B}$

$|BD| = |BD|$ car côté commun aux 2 triangles

⇒ cas CAC ⇒ ..

b) $|\widehat{EFI}| = |\widehat{IHG}|$ car ∡ alternes-internes formés par les // EF et GH

$|EI| = |IH|$ car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu

$|\widehat{EIF}| = |\widehat{GIH}|$ car ∡ opposés par le sommet

⇒ cas ACA ⇒ ...

c) $|KJ| = |MJ|$ car rayon du cercle

$|KL| = |MN|$ car hypothèse

$|JL| = |NJ|$ car rayon du cercle

⇒ cas CCC ⇒ ...

d) $|TR| = |QO|$ par hypothèse

$|\hat{R}| = |\hat{O}|$ car 2 ∡ à côtés perpendiculaires ont la m amplitude si ils sont tous les deux aigus.

$|SR| = |OP|$ par hypothèse

⇒ cas CAC ⇒ ...

e) $|UW| = |ZV|$ car hyp.

$|\widehat{WUV}| = |\widehat{ZVU}|$ car hyp

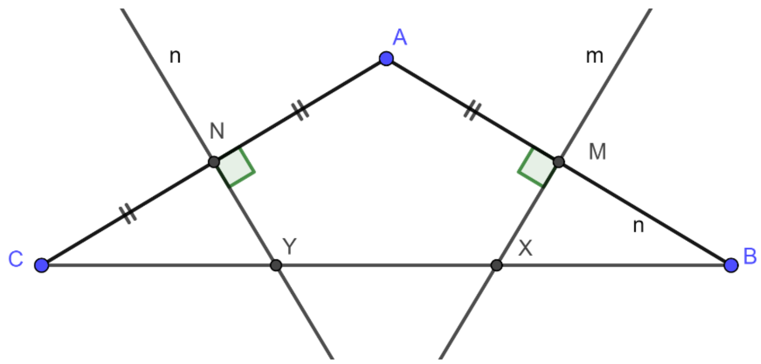
$|UV| = |UV|$ car hyp

⇒ cas CAC ⇒ ...

Je dois transférer

2) Soit un triangle obtusangle ABC isocèle en A. La médiatrice m de [AB] coupe [AB] en M et BC en X ; la médiatrice n de [AC] coupe [AC] en N et BC en Y. Démontre que les segments [BX] et [CY] ont la même longueur.

Dessin :



Hypothèse :

Triangle ABC isocèle en A
$|AC| = |AB|$ 1
n médiatrice de [AC]
$\Rightarrow$ n $\perp$ [AC] et $|CN| = |AN|$ 2
m médiatrice de [AB]
$\Rightarrow$ m $\perp$ [AB] et $|AM| = |MB|$ 3

Thèse :

$|BX| = |CY|$

Démonstration :

❖ Considérons les triangles CYN et BXM (Attention à l'ordre des sommets homologues)

❖ On sait que :

CAC

➢ $|\widehat{YCN}| = |\widehat{XBM}|$ car dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même amplitude

➢ $|CN| = |BM|$ car hypothèses 1 – 2 - 3

➢ $|\widehat{CNY}| = |\widehat{BMX}|$ car les médiatrices sont perpendiculaires aux segments de droites (hyp 2 – 3)

❖ On en déduit que les triangles CYN et BXM sont isométriques, car ils ont un angle de même amplitude compris entre deux côtés, 2 à 2, de même longueur.

❖ Donc, $|BX| = |CY|$ car tous les côtés de triangles isométriques sont de mêmes longueurs

CQFD

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹

Séquence 3 : LE THÉORÈME DE THALÈS

Je dois connaître :

ÉNONCÉ GÉNÉRAL DU THÉORÈME DE THALÈS :

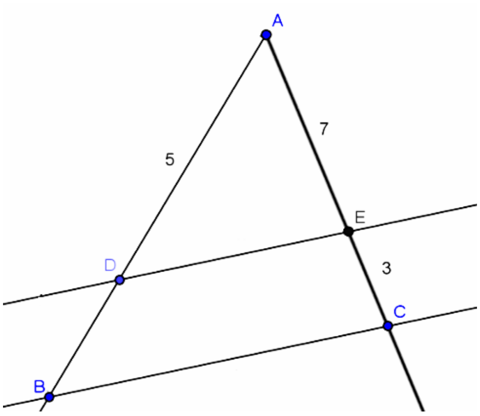
Des droites parallèles déterminent sur deux droites sécantes qui les coupent des segments homologues de longueurs proportionnelles.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS :

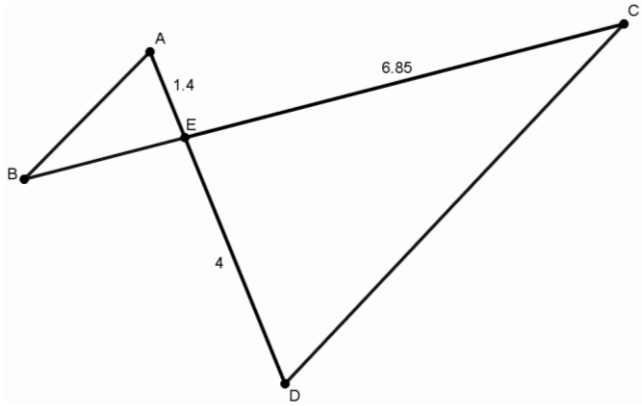
Si deux droites sont coupées par **deux droites parallèles**, si **une troisième droite** coupe les deux premières en des points situés **du même côté** par rapport à chaque parallèle et si le **rapport** des longueurs des segments homologues ainsi déterminés est **constant**, alors la troisième droite est **parallèle** aux deux premières.

Je dois appliquer :

1) Sur la figure ci-contre, DE // BC.
Déduis-en les proportions et calcule $|BD|$, $|AB|$ et $|AC|$.



2) Sur la figure ci-contre, AB // CD.
Déduis-en les proportions et calcule $|AD|$, $|BE|$ et $|BC|$.



1) a) $|\hat{A}| = |\hat{A}|$ car ∠ commun aux 2 Δ.

$|\widehat{ADE}| = |\widehat{ABC}|$ car ∠ correspondants formés par les // DE et BC.

=> les Δ ADE et ABC sont semblables car ils ont 2 ∠ homologues de même amplitude

b) $\frac{ADE}{ABC} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = k$ (a)

c) car il y a 2 parallèles coupées par 2 sécantes.

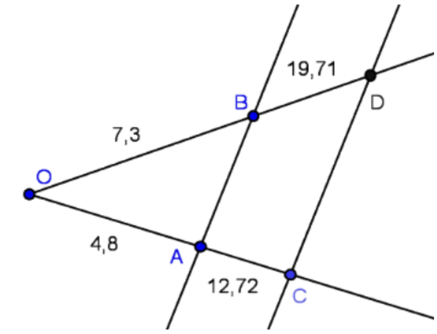
d) $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$

e) $\frac{5}{7} = \frac{y-5}{3} = \frac{y}{10}$ → (a) $\frac{5}{y} = \frac{x}{8} = \frac{7}{10}$

$7y = 5 \cdot 10$ $\qquad 10x = 8 \cdot 7$

$y = \frac{50}{7}$ $\qquad x = \frac{56}{10} = 5,6$

3) Dans la figure ci-dessous, peut-on affirmer que AB // CD ? Justifie.



3) $\frac{|OA|}{|OB|} \overset{?}{=} \frac{|AC|}{|BD|}$

$\frac{4,8}{7,3} \overset{?}{=} \frac{12,72}{19,71}$

$4,8 \cdot 19,71 \overset{?}{=} 7,3 \cdot 12,72$

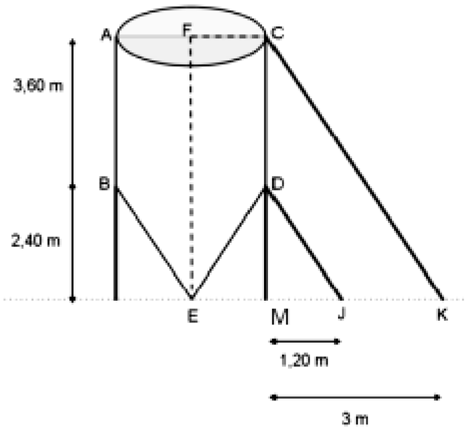
$94,608 \neq 92,856$

=> AB ∦ CD (car contraposée de Thalès)

Je dois transférer :

4) Un silo à grains a la forme d'un cône surmonté d'un cylindre de même axe.

Pour réaliser des travaux, deux échelles représentées par $[DJ]$ et par $[CK]$ ont été posées contre le silo.
Ces deux échelles sont-elles parallèles ?



4) DJ // CK ?

$$\frac{|XJ|}{|XD|} \overset{?}{=} \frac{|JK|}{|CD|}$$

$$\frac{1,20}{2,40} \overset{?}{=} \frac{1,80}{3,60}$$

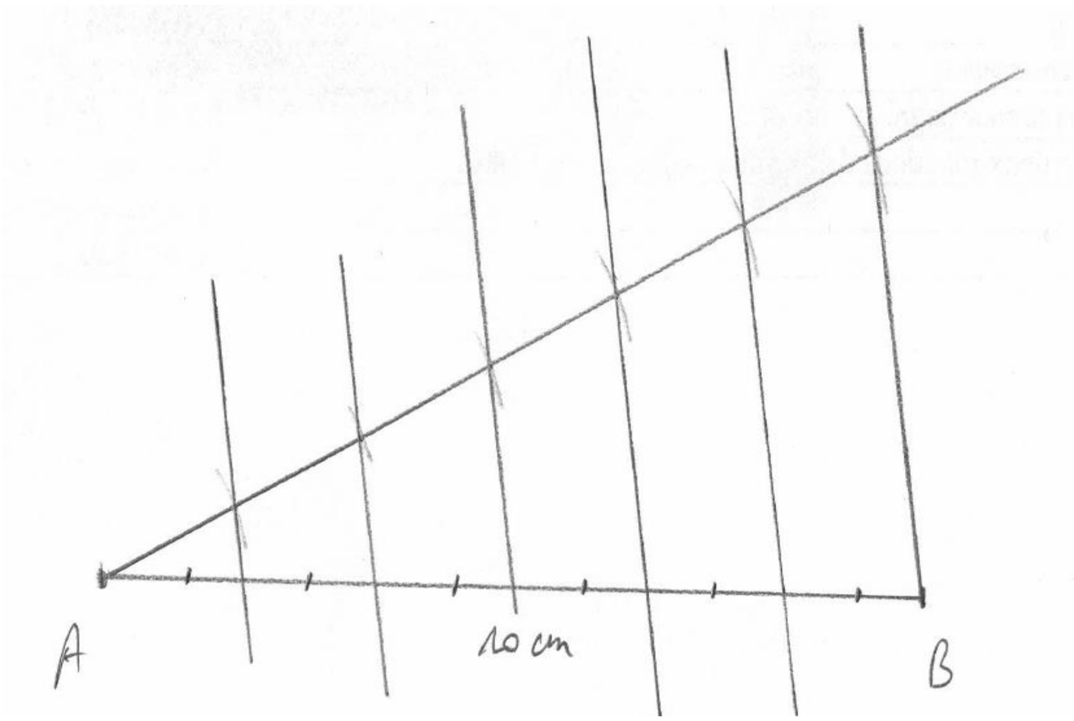
$$1,20 . 3,60 \overset{?}{=} 2,40 . 1,80$$

$$4,32 = 4,32$$

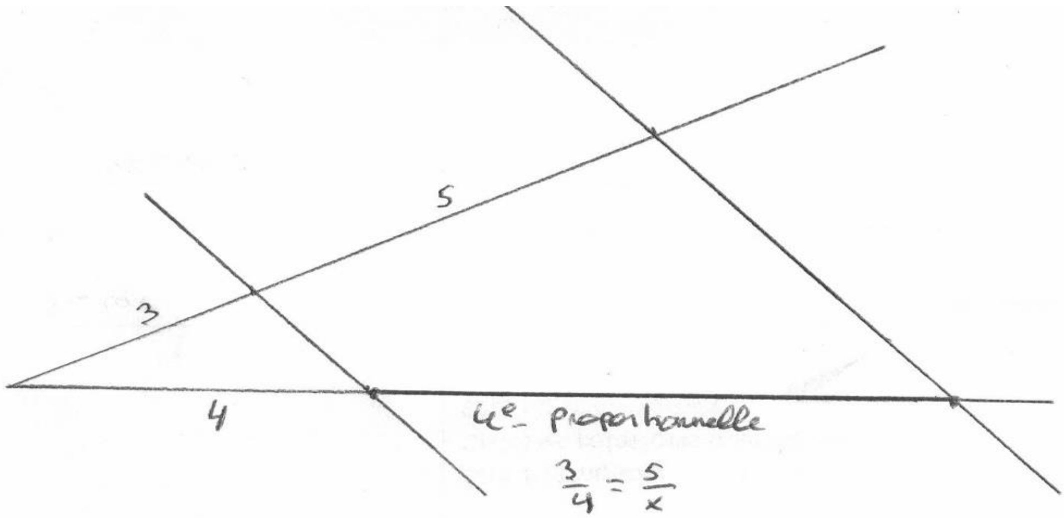
→ JD // CK

→ les échelles sont parallèles

5) Partage un segment de 10cm en 6 segments consécutifs de même longueur.



6) Détermine graphiquement la 4ème proportionnelle à 3, 4 et 5 et vérifie algébriquement.



$$\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$$

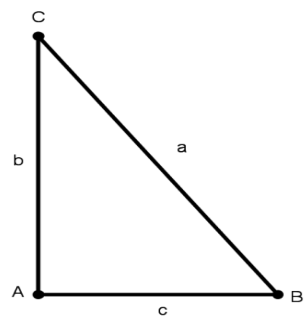
3UAA2 : TRIANGLE RECTANGLE

Séquence 2 : LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Je dois connaître :

ÉNONCÉ DU THÉORÈME DE PYTHAGORE :

Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.



FORMULES ET TRANSFORMATIONS DE FORMULES :

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE :

Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME DE PYTHAGORE :

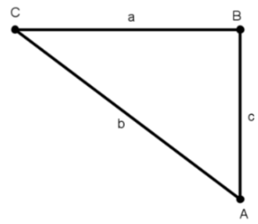
Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

LONGUEUR D'UN SEGMENT DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ :

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Je dois appliquer :

1) Complète le tableau ci-dessous (réponses arrondies à 0,01 près sur feuille annexe.



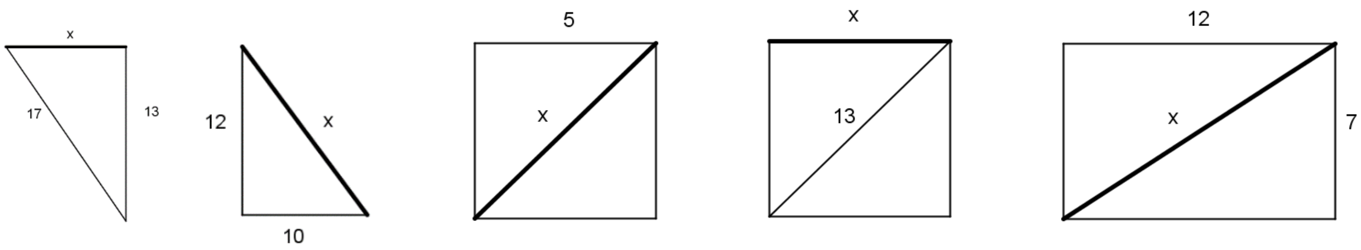
	a	b	c
①	14		8
②		1,7	0,9
③	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	

①
$b^2 = a^2 + c^2$
$b^2 = 14^2 + 8^2$
$b^2 = 196 + 64 = 260$
$b = \sqrt{260} = 2\sqrt{65} = 16{,}12$

②
$a^2 = b^2 - c^2$
$a^2 = 1{,}7^2 - 0{,}9^2$
$a^2 = 2{,}89 - 0{,}81 = 2{,}08$
$a = \sqrt{2{,}08} = 1{,}44$

③
$c^2 = b^2 - a^2$
$c^2 = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$
$c^2 = 3 - 2 = 1$
$c = \sqrt{1} = 1$

2) Calcule x, h et c (réponses arrondies à 0,01 près.



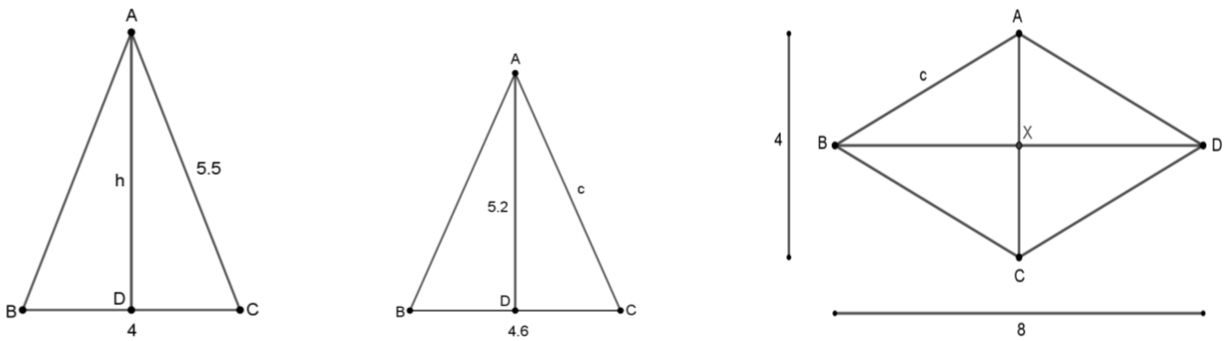
$x^2 = 12^2 - 10^2$
$x^2 = 144 - 100$
$x = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$x^2 = 17^2 - 13^2$
$x^2 = 120$
$x = \sqrt{120}$
$x = 2\sqrt{30}$

$x = 5\sqrt{2}$

$x^2 + x^2 = 13^2$
$2x^2 = 169$
$x^2 = \frac{169}{2}$
$x = \sqrt{\frac{169}{2}}$
$x = \frac{13}{\sqrt{2}}$

$x^2 = 12^2 + 7^2$
$x^2 = 144 + 49$
$x^2 = 193$
$x = \sqrt{193}$



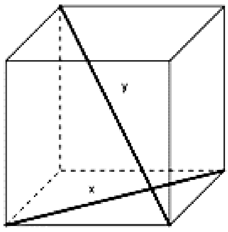
$h^2 = 5{,}5^2 - 2^2$
$h^2 = 30{,}25 - 4 = 26{,}25$
$h = \sqrt{26{,}25} = 5{,}12$

$c^2 = 5{,}2^2 + 2{,}3^2$
$c^2 = 27{,}04 + 5{,}29 = 32{,}33$
$c = \sqrt{32{,}33} = 5{,}69$

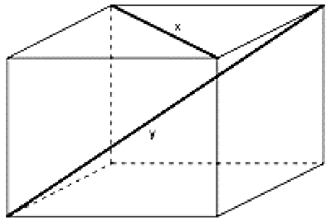
$c^2 = 2^2 + 4^2$
$c^2 = 4 + 16 = 20$
$c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 4{,}47$

3) <u>Calcule x et y (réponses arrondies à 10^{-3} près sur feuille annexe.</u>

arête = 8 cm



L = 10 cm   l = 8 cm   h = 5 cm



a) $x = 8\sqrt{2}$

$y = 8\sqrt{3}$

b) $x^2 = 10^2 + 8^2$

$x^2 = 100 + 64$

$x = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$

$y^2 = (2\sqrt{41})^2 + 5^2$

$y^2 = 164 + 25$

$y = \sqrt{189}$

4) <u>Dans chaque cas, détermine si le triangle ABC est rectangle :</u>

a) a = 11   b = 9   c = 7

a) $11^2 \overset{?}{=} 9^2 + 7^2$

$121 \overset{?}{=} 81 + 49$ $\Rightarrow$ le ΔABC n'est pas rectangle

$121 \neq 130$

b) a = $13\sqrt{2}$ b = $12\sqrt{2}$ c = $5\sqrt{2}$

b) $(13\sqrt{2})^2 \overset{?}{=} (12\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$

$169 \cdot 2 \overset{?}{=} 144 \cdot 2 + 25 \cdot 2$ $\Rightarrow$ le Δ ABC est rectangle en

$338 = 338$

5) Détermine au millième près :

a) La diagonale d'un carré si son côté mesure $\sqrt{6}$ cm

Diagonale du carré = a $\sqrt{2}$ = $\sqrt{6}$. $\sqrt{2}$ = $\sqrt{12}$ = 3,464 cm

b) Le côté d'un carré dont la diagonale mesure $\sqrt{10}$ cm

$x^2 + x^2 = \sqrt{10}$

$2x^2 = \sqrt{10}$

$x^2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$x = \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{2}}$ = 1,257 cm

c) La diagonale d'un rectangle dont la longueur mesure 8cm et la largeur 3cm

$x^2 = 8^2 + 3^2$
$x^2 = 64 + 9 = 73$
$x = \sqrt{73}$ = 8,544 cm

d) La largeur d'un rectangle dont la diagonale mesure 22cm et la longueur 18cm

$x^2 = 22^2 - 18^2$

$x^2 = 484 - 324 = 160$

$x = \sqrt{160}$ = 12,649 cm

e) La diagonale d'un cube dont l'arête mesure $5\sqrt{7}$ cm

Diagonale du cube = a $\sqrt{3}$ = $5\sqrt{7}$. $\sqrt{3}$ = 5 $\sqrt{21}$ = 22,913 cm

f) L'arête d'un cube dont la diagonale mesure $3\sqrt{6}$ cm

Diagonale du cube = a $\sqrt{3}$
$3\sqrt{6}$ = a $\sqrt{3}$

$\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = a$

$3\sqrt{\frac{6}{3}} = a$

a = $3\sqrt{2}$ cm

g) La diagonale d'un parallélépipède dont les mesures sont 4cm, 7cm et 9cm

$x^2 = 4^2 + 7^2$ $x^2 = 16 + 49 = 65$ $x = \sqrt{65}$	$y^2 = (\sqrt{65})^2 + 8^2$ $y^2 = 65 + 64 = 129$ $y = \sqrt{129}$ = 11,358 La diagonale est de 11,358 cm

6) Calcule la longueur du segment [AB] dans un repère orthonormé si les coordonnées de A et B sont respectivement (5 ; -3) et (3 ; 2).

$$|AB| = \sqrt{(3-5)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Je dois transférer :

7) Une antenne relai est munie de tendeurs de même longueur, fixés sur le mât à des hauteurs différentes.
La figure ci-contre montre deux de ces tendeurs : [AE] et [BC].
On sait que : $|AD|$ = 16m ; $|ED|$ = 18m et $|BD|$ = 15m.
Calculer la longueur des tendeurs et la distance du point d'ancrage C au pied du mât D.

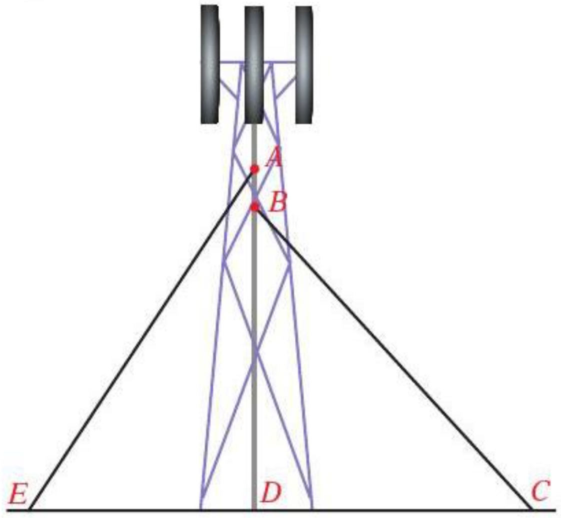


fig. 29

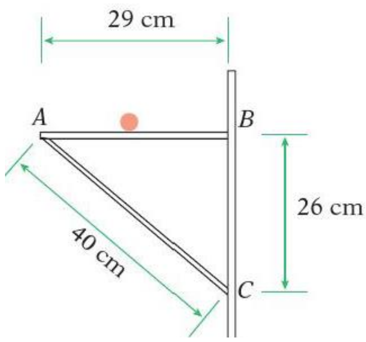
$|AB|$ = 16 – 15 = 1

$|AE|^2 = |ED|^2 + |AD|^2$
$|AE|^2 = 18^2 + 16^2$
$|AE|^2 = 324 + 256 = 580$
$|AE| = \sqrt{580} = 2\sqrt{145} = 24{,}08$
Les longueurs des tendeurs ont une longueur de 24,08 m

$|DC|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$
$|DC|^2 = (2\sqrt{145})^2 - 15^2$
$|DC|^2 = 580 - 225 = 355$
$|DC| = \sqrt{355} = 18{,}84$

La distance du point d'ancrage C au pied du mât D est de 18,84 m

8) Sébastien fabrique une étagère. Il réalise un plan sur lequel il indique les mesures à prendre.
Une fois l'étagère montée, il y dépose une bille.
Celle-ci reste-t-elle en place ?



$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$?
$40^2 = 29^2 + 26^2$?
$1600 \neq 841 + 676$
$1600 \neq 1517$

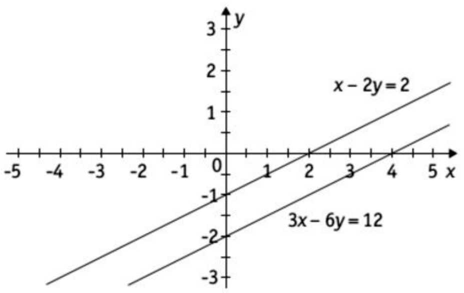
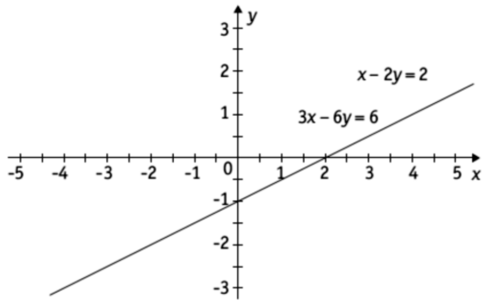
Le triangle ABC n'est pas rectangle en B par la contraposée du théorème de Pythagore.
La planche [AB] n'est pas horizontale.
La bille ne reste pas en place.

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹

3UAA5 : OUTILS ALGÉBRIQUES

Séquence 3 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Je dois connaître :

	Système impossible	Système indéterminé
Exemples :	$\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x-6y=6 \end{cases}$
Graphiques :		
Caractéristiques des graphiques :	Les droites sont parallèles	Les droites sont confondues
Nbres de points d'intersection entre les droites :	0	Une infinité
Nombre de solutions :	Système impossible **$S = \varnothing$**	Système indéterminé **$S = \{(x\,;y) \in d \equiv ax + by + c = 0\}$**

Je dois appliquer :

1) Résous algébriquement (par la méthode de ton choix) les systèmes suivants : (Sur feuille annexe)

$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 7x + y = 10 \\ 6x - 2y = 20 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 5x + 4y = 14 \\ 2x - 2y = 20 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 6x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

1) a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$ Par substitution $\begin{cases} 3x - 3 = y \quad ① \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = y \\ 2x + (3x - 3) = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = y \\ 2x + 3x - 3 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = y \\ 5x = 7 + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = y \\ x = \frac{10}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow 3.2 - 3 = y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \{(2;3)\}$

b) $\begin{cases} 7x + y = 10 \\ 6x - 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 7x \\ 6x - 2y = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 7x \\ 6x - 2.(10 - 7x) = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 7x \\ 6x - 20 + 14x = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 7x \\ 20x = 20 + 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 7x \\ x = \frac{40}{20} = 2 \end{cases} \rightarrow y = 10 - 7.2 \Rightarrow y = 10 - 14 = -4 \Rightarrow S = \{(2;-4)\}$

2) . Par combinaisons linéaires

a) $\begin{cases} 5x+4y=14 \\ 2x-2y=20 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot(-5) \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} 10x+8y=28 \\ -10x+10y=-100 \end{cases}$$

$18y=-72$

$y=\frac{-72}{18}=-4$

$5x+4y=14$

$4x-4y=40$

$9x=54$

$x=\frac{54}{9}=6$

$S=\{(6;-4)\}$

b) $6x-y=2$ $\quad$ $\cdot 1$ $\quad$ $\cdot 1$

$2x+y=2$ $\quad$ $\cdot(-3)$ $\quad$ $\cdot 1$

$6x-y=2$

$-6x-3y=-6$

$-4y=-4$

$y=\frac{-4}{-4}=1$

$6x-y=2$

$2x+y=2$

$8x=4$

$x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$S=\{(\frac{1}{2};1)\}$

Je dois transférer :

2) Résous les problèmes suivants sur feuille annexe.

a) La somme de deux nombres naturels vaut 27. La différence entre ces deux nombres est 3. Quels sont ces deux nombres ?

a) C.I. : x et y sont les 2 nombres recherchés

M.E. : $\begin{cases} x+y=27 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27-y \\ x-y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=27-y \\ 27-y-y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=27-y \\ 27-2y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=27-y \\ -2y=3-27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=27-y \\ y=\frac{-24}{-2}=12 \end{cases} \Rightarrow x=27-12=15$

Sol : 15 et 12 sont les deux nombres recherchés.

Vérif : $15+12=27$ $\quad 15-12=3$.

b) J'ai 95 billets de 5 et 20 € pour un montant de 925 €. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte dans ma tirelire ?

b) C.I. x billets de 5 € et y billets de 20 €

M.E. : $\begin{cases} x+y=95 \\ 5x+20y=925 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \cdot(-5) \\ \cdot 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \cdot(-20) \\ \cdot 1 \end{vmatrix}$

$-5x-5y=-475$

$5x+20y=925$

$15y=450$

$y=30$

$-20x-20y=-1900$

$5x+20y=925$

$-15x=-975$

$x=\frac{-975}{-15}=65$

Sol : 65 billets de 5 € et 30 billets de 20 €

Vérif : $65+30=95$ billets et $65.5+30.20=325+600=925$ €

c) Il y a deux ans de différence entre mes deux enfants. Actuellement, la différence entre le quintuple de l'âge du second et le triple de l'âge de l'aîné vaut aussi deux.
Détermine l'âge de mes enfants.

c) C.I : x est l'âge de l'aîné ; y l'âge du second

R.E : $\begin{cases} x - y = 2 \\ 5y - 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 5y - 3x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 5y - 3(2+y) = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 5y - 6 - 3y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ 2y = 2 + 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ y = \frac{+8}{2} = +4 \end{cases} \Rightarrow x = 2 + 4 = 6$

Sol : l'aîné a 6 ans et le second 4 ans

Vérif : $6 - 4 = 2$ et $5.4 - 3.6 = 2$ ok
$20 - 18 = 2$

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹

Séquence 4 : PUISSANCES À EXPOSANTS ENTIERS

Je dois connaître :

DÉFINITION D'UNE PUISSANCE À EXPOSANT ENTIER :

En français :

Si a est un réel non nul et n est un naturel non nul, alors :
a^{-n} est l'inverse de a^n

En math :

Si $a \in R_0$ et si $n \in N_0$, alors : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Conséquences :

Si a et b $\in R_0$ et si m et n $\in N_0$, alors : $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$; $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^m}{a^m}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$; $(-a)^{-n} = \frac{1}{(-a)^n}$

PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES À EXPOSANTS ENTIERS :

En français :

1) Produit de puissances de même base :

Pour multiplier des puissances de même base,
On conserve la base et on additionne les exposants.

2) Quotient de puissances de même base :

Pour diviser des puissances de même base,
On conserve la base et on soustrait les exposants.

3) Puissance d'une puissance :

Pour élever une puissance à une puissance,
On conserve la base et on multiplie les exposants.

4) Puissance d'un produit :

Pour élever un produit à une puissance,
On élève chaque facteur à cette puissance.

5) Puissance d'un quotient :

Pour élever un quotient (fraction) à une puissance,
On élève chaque terme à cette puissance.

En math : Si a et b ϵ R_0 et si n et p ϵ Z_0, alors :

1) Produit de puissances de même base :

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

2) Quotient de puissances de même base :

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

3) Puissance d'une puissance :

$\left(a^n\right)^p = a^{n \cdot p}$

4) Puissance d'un produit :

$(a.b)^n = a^n \cdot b^n$

5) Puissance d'un quotient :

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Je dois appliquer :

1. Calcule (Rappel : il faut d'abord rendre les exposants positifs) :

$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$	$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-3)^5} = -\frac{1}{243}$	$(-4)^{-4} = \frac{1}{(-4)^4} = \frac{1}{256}$	$10^{-6} = \frac{1}{1000000}$
$4^5 = 1024$	$(-6)^3 = \frac{1}{(-6)^5} = -\frac{1}{216}$	$7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$	$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$	$-2^{-5} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$	$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{-2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$\left(\frac{4}{-3}\right)^{-5} = \left(\frac{-3}{4}\right)^5 = -\frac{243}{1024}$	$\left(\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$	$\left(\frac{11}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{81}{121}$
$\frac{4}{5^{-2}} = 4 \cdot 5^2 = 100$	$\frac{7^{-3}}{4^2} = \frac{1}{4^2 \cdot 7^3} = \frac{1}{5488}$	$\frac{(-5)^4}{3^{-2}} = (-5)^4 \cdot 3^2 = 5625$	$\frac{(-8)^{-2}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{(-8)^2} = \frac{125}{64}$	$\frac{9^{-1}}{(-5)^{-3}} = \frac{(-5)^3}{9} = -\frac{125}{9}$

2. Utilise les propriétés des puissances pour calculer :

$5^{-2}.5^{3} = 5^{1} = 5$	$(3^{-2})^{-1} = 3^{2} = 9$	$\frac{2^{-13}}{2^{-15}} = 2^{-13-(-15)} = 2^{2} = 4$
$4^{-7}.4^{-3}.4^{13} = 4^{3} = 64$	$(3^{-2})^{3}.(3^{-3})^{-2} = 3^{-6}.3^{6} = 3^{0} = 1$	$\frac{2^{-3}.2^{7}}{2^{-12}.2^{14}} = \frac{2^{4}}{2^{2}} = 2^{2} = 4$

3. Réduis les expressions suivantes :
(Conseil : travaille d'abord entre les parenthèses pour supprimer les exposants négatifs)

$(5a^{-3})^{2} = 5^{2}a^{-6} = \frac{25}{a^{6}}$	$\left(\frac{a^{-5}}{b^{4}}\right)^{3} = \frac{a^{-15}}{b^{12}} = \frac{1}{a^{15}b^{12}}$	$\left(\frac{-x^{7}y^{-2}}{x^{3}y^{5}}\right)^{-6} = \frac{-x^{-42}y^{12}}{x^{-18}y^{-30}} = \frac{x^{18}y^{12}y^{30}}{-x^{42}y^{10}} = \frac{x^{18}y^{42}}{-x^{42}y^{10}} = -x^{-24}y^{32} = -\frac{y^{32}}{x^{24}}$
$(8x^{-1})^{-2} = 8^{-2}x^{2} = \frac{x^{2}}{64}$	$\left(\frac{7x^{-2}}{y^{-5}}\right)^{-2} = \frac{7^{-2}x^{4}}{y^{10}} = \frac{x^{4}}{49y^{10}}$	$\left(\frac{-9c^{-5}}{-2d^{-3}}\right)^{-2} = \frac{(-9)^{-2}c^{10}}{(-2)^{-2}d^{6}} = \frac{c^{10}(-2)^{2}}{(-9)^{2}d^{6}} = \frac{4c^{10}}{81d^{6}}$
$(3a^{-5}b^{4})^{2} = 3^{2}a^{-10}b^{8} = \frac{9b^{8}}{a^{10}}$	$\left(\frac{-5c^{-2}}{d^{3}}\right)^{-4} = \frac{(-5)^{-4}c^{8}}{d^{-12}} = \frac{c^{8}d^{12}}{(-5)^{4}} = \frac{c^{8}d^{12}}{625}$	$\left(\frac{-4a^{2}}{5b^{9}c^{-3}}\right)^{-4} = \frac{(-4)^{-4}a^{-8}}{5^{-4}b^{-36}c^{12}} = \frac{5^{4}b^{26}}{(-4)^{4}a^{8}c^{12}} = \frac{625b^{26}}{256a^{8}c^{12}}$
$(6x^{8}y^{-3})^{-2} = 6^{-2}x^{-16}y^{6} = \frac{y^{6}}{36x^{16}}$	$\frac{(-4x^{3}y^{5})^{-2}}{(3x^{-2}y^{3})^{-1}} = \frac{(-4)^{-2}x^{-6}y^{-10}}{d^{-12}} = \frac{d^{12}}{(-4)^{2}x^{6}y^{10}} = \frac{d^{12}}{16x^{6}y^{10}}$	$\frac{(x^{-11}y^{7})^{-6}}{(x^{8}y^{9})^{-3}} = \frac{x^{66}y^{-42}}{x^{-24}y^{-27}} = \frac{x^{66}x^{24}y^{27}}{y^{42}} = x^{90}y^{-15} = \frac{x^{90}}{y^{15}}$

4. Calcule en utilisant la notation scientifique :
(Rappel : on transforme en notation scientifique avant d'effectuer les opérations)

$A = 5000^{3} = (5.10^{3})^{3} = 125.10^{9} = 1,25.10^{2}.10^{9} = 1,25.10^{11}$

$B = 0,0025^{2} = (25.10^{-4})^{2} = 625.10^{-8} = 6,25.10^{2}.10^{-8} = 6,25.10^{-6}$

$C = 2000^{-3} = (2.10^{3})^{-3} = \frac{1}{8}.10^{-9} = 0,125.10^{-9} = 1,25.10^{-1}.10^{-9} = 1,25.10^{-10}$

$D = 0,00005^{2} = (5.10^{-5})^{2} = 25.10^{-10} = 2,5.10^{1}.10^{-10} = 2,5.10^{-9}$

$E = \frac{5000^{3}.0,0025^{2}}{2000^{-3}.0,00005^{2}} = \frac{\cancel{1,25}.10^{11}.6,25.10^{-6}}{\cancel{1,25}.10^{-10}.2,5.10^{-9}} = \frac{6,25.10^{5}}{2,5.10^{-19}} = 2,5.10^{5}.10^{19}$

$= 2,5.10^{24}$

5. En un an la lumière parcourt environ 9,46 . 10^{12} km. Le diamètre de la Voie Lactée est de 100000 années-lumière. Convertis cette distance en kilomètres. Utilise la notation scientifique.

1 année lumière $\longleftrightarrow$ 9,46 . 10^{12} km
100000 années lumières $\longleftrightarrow$ 9,46 . 10^{17} km

On sait que chaque m³ de pétrole pèse 860 kg. Lors d'un incendie, 258 tonnes de pétrole se répandent sur la mer. On estime que ce pétrole forme une couche de 10^{-4} cm d'épaisseur et on suppose que celui-ci s'étale uniformément à la surface de l'eau.
Calcule l'aire (en km²) de la tache ainsi formée.

Aide : Volume de pétrole = Aire de la surface du pétrole . épaisseur

860 kg $\longleftrightarrow$ 1 m³
1 kg $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{860}$ m³
258 . 10^3 kg $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{860}$. 258 . 10^3 = $\frac{258 . 10^3}{86 . 10^1}$ = 3 . 10^2 = 300 m³

Aire de la tâche formée par le pétrole = $\frac{Volume}{épaisseur}$ = $\frac{3 . 10^2}{10^{-6}}$ = 3 . 10^8 m²

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹

Séquence 5 : L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS – RADICAUX

Je dois connaître :

DÉFINITION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE RÉEL :

En français : La racine carrée du nombre réel positif a, notée $\sqrt{a}$, est le réel positif dont le carré est a

En math : $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2$ et $a \geq 0$

PROPRIÉTÉS DES RADICAUX : Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}_0^+$:

$\sqrt{a.b} = \sqrt{a} . \sqrt{b}$ La racine carrée du produit de deux nombres positifs est égale au produit de leurs racines carrées

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ La racine carrée du quotient de deux nombres positifs est égale au quotient de leurs racines carrées.

$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ La racine carrée d'une puissance est égale à la racine carrée élevée à cette puissance.

Je dois appliquer :

1. Simplifie les radicaux suivants :

$\sqrt{36} = 6$ — $2\sqrt{36} = 2.6 = 12$ — $-4\sqrt{36} = -4.6 = -24$

$\sqrt{50} = \sqrt{25.2} = 5\sqrt{2}$ — $2\sqrt{50} = 2.5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ — $\frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{1}{5}.5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$2\sqrt{72} = 2\sqrt{36.2} = 2.6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ — $5\sqrt{18} = 5\sqrt{9.2} = 5.3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ — $-2\sqrt{48} = -2.\sqrt{16.3} = -8\sqrt{3}$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ — $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4.3 = 12$ — $\left(-3\sqrt{5}\right)^2 = 9.5 = 45$

$\left(\sqrt{7}\right)^3 = \sqrt{7^2.7} = 7\sqrt{7}$ — $\left(2\sqrt{2}\right)^3 = 8.2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

2. Effectue les opérations suivantes :

$\sqrt{2}+\sqrt{5} =$

$3\sqrt{2}+5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$2\sqrt{3}.5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$

$2\sqrt{5}.3 = 6\sqrt{5}$

$-3\sqrt{5}.\sqrt{10} = -3\sqrt{50} = -3.5\sqrt{2} = -15\sqrt{2}$

$-2\sqrt{6}.3\sqrt{6} = -6.6 = -36$

$\sqrt{75}+\sqrt{48} = \sqrt{25.3} + \sqrt{16.3} = 5\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\sqrt{125}-\sqrt{180} = \sqrt{25.5} - \sqrt{36.5} = 5\sqrt{5}-6\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

$\sqrt{75}.\sqrt{50}.\sqrt{72} = \sqrt{25.3}.\sqrt{25.2}.\sqrt{36.2} = 5\sqrt{3}.5\sqrt{2}.6\sqrt{2}$
$= 150\sqrt{12} = 150\sqrt{4.3} = 150.2\sqrt{3} = 300\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}} = \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3}$

$\frac{3\sqrt{18}}{6\sqrt{98}} = \frac{3.3\sqrt{2}}{6.\sqrt{49.2}} = \frac{9\sqrt{2}}{42\sqrt{2}} = \frac{3}{14}$

3. Effectue les distributivités et les produits remarquables :

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$

$\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 4.3 + 6\sqrt{6} + 9.2 = 12 + 6\sqrt{6} + 18 = 30 + 6\sqrt{6}$

$\left(\sqrt{7}-1\right).\left(\sqrt{7}+1\right) = (\sqrt{7})^2 - 1^2 = 7 - 1 = 6$

$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 4.3 - 5 = 12 - 5 = 7$

$2\sqrt{5}.(\sqrt{3}-3\sqrt{5}) = 2\sqrt{15} - 6\sqrt{25} = 2\sqrt{15} - 30$

$\left(2\sqrt{3}-3\right).\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right) = 2\sqrt{6} + 6\sqrt{15} - 3\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹

Séquence 6 : LES POLYNÔMES

Je dois connaître :

DÉFINITION D'UN MONÔME :

Un monôme est un produit entre un nombre (coefficient) et une partie littérale.

DÉFINITION D'UN POLYNÔME :

Un polynôme est une somme algébrique de monômes.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Je dois appliquer :

1) Réduis, ordonne et complète les polynômes suivants. Détermine leur degré.

a) $P_1(x) = 3x^2 - (3x^2 - x + 6) + 7x^3 = 3x^2 - 3x^2 + x - 6 + 7x^3 = 7x^3 + 0x^2 + x - 6$
b) $P_2(z) = -(z^2 - z) + (z^3 - z + 1) - (1 - z^2) = -z^2 + z + z^3 - z + 1 - 1 + z^2 = z^3 + 0z^2 + 0z + 0$
c) $P_3(x) = 3x(1 + x) - x(3x - 1) = 3x + 3x^2 - 3x^2 + x = 4x + 0$
d) $P_4(x) = (3x^2 - 2x) . (2x + 1) = 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 2x = 6x^3 - x^2 - 2x + 0$

2) Ordonne les polynômes puis calcule leur valeur numérique pour la valeur donnée.

a) $P_1(x) = 4x^2 - 5x^3 - 6 + 2x$ pour $x = -2$
$P_1(-2) = 4 . (-2)^2 - 5 . (-2)^3 - 6 + 2 . (-2) = 4 . 4 - 5 . (-8) - 6 - 4 = 16 + 40 - 6 - 4 = 46$
b) $P_2(t) = -3t^2 - 3t + 8 - t^5$ pour $t = -1$
$P_1(-1) = -3 . (-1)^2 - 3 . (-1) + 8 - (-1)^5 = -3 . 1 - 3 . (-1) + 8 - (-1) = -3 + 3 + 8 + 1 = 9$
c) $P_3(u) = -2u - 3u^3 + 12u^7 - 45$ pour $u = 0$
$P_1(0) = -2 . 0 - 3 . 0^3 + 12 . 0^7 - 45 = -45$
d) $P_4(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 2$ pour $x = \sqrt{2}$
$P_1(\sqrt{2}) = -2 . (\sqrt{2})^3 + 4 . (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 2 = -2 . 2\sqrt{2} + 4 . 2 - \sqrt{2} + 2 = -4\sqrt{2} + 8 - \sqrt{2} + 2$
$= -5\sqrt{2} + 10$

3) Soit les polynômes $K(x) = x^2 - x + 2$; $L(x) = 3x - 1$; $M(x) = -x^3 - x^2 + 1$; $N(x) = x^3 - 4x$; $P(x) = 1 - 2x - x^2$

Effectue les opérations suivantes :

a) $K(x) + P(x) = x^2 - x + 2 + 1 - 2x - x^2 = -3x + 3$
b) $K(x) + N(x) - M(x) = x^2 - x + 2 + x^3 - 4x - (-x^3 - x^2 + 1) = x^2 - x + 2 + x^3 - 4x + x^3 + x^2 - 1$
$= 2x^3 + 2x^2 - 5x + 1$
c) $2L(x) - 3K(x) - P(x) = 2. (3x - 1) - 3 . (x^2 - x + 2) - (1 - 2x - x^2)$
$= 6x - 2 - 3x^2 + 3x - 6 - 1 + x + x^2 = -2x^2 + 10x - 9$
d) $K(x) . P(x) = (x^2 - x + 2) . (1 - 2x - x^2) = x^2 - 2x^3 - x^4 - x + 2x^2 + x^3 + 2 - 4x - 2x^2$
$= -x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 2$
e) $L(x) . N(x) = (3x - 1) . (x^3 - 4x) = 3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x = 3x^4 - x^3 - 12x^2 + 4x$
f) $M(x) . P(x) = (-x^3 - x^2 + 1) . (1 - 2x - x^2) = -x^3 + 2x^4 + x^5 - x^2 + 2x^3 + x^4 + 1 - 2x - x^2$
$= x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

4) <u>Effectue les produits remarquables :</u>

a) $(a^3 - 3) . (a^3 + 3) = a^6 - 9$
b) $(x^2 + 2y)^2 = x^4 + 4\,x^2y + 4y^2$
c) $(2ab - 1) . (1 + 2ab) = 4a^2b^2 - 1$
d) $(3x + 1) . (1 - 3x) = 1 - 9x^2$
e) $(-x^3 - y) . (-x^3 + y) = x^6 - y^2$
f) $(3a - 2b) . (9a^2 - 4b^2) . (3a + 2b) = (9a^2 - 4b^2)\ (9a^2 - 4b^2) = 81a^4 - 72a^2b^2 + 16b^4$
g) $(5x^2 + 3) . (5x^2 - 3) . (25x^4 + 9) = (25x^4 - 9)\ (25x^4 + 9) = 625x^8 - 81$

5) <u>Réduis les expressions :</u>

a) $(3x - 5)^2 - (x + 2) . (x - 2) = 9x^2 - 30x + 25 - (x^2 - 4) = 9x^2 - 30x + 25 - x^2 + 4 = 8x^2 - 30x + 29$
b) $(4x^2 - 5) . (4x^2 + 5) - (3x + 2) . (3x - 2) - (5x^3 - 1)^2 = 16x^4 - 25 - (9x^2 - 4) - (25x^6 - 10x^3 + 1)$
$= 16x^4 - 25 - 9x^2 + 4 - 25x^6 + 10x^3 - 1 = - 25x^6 + 16x^4 + 10x^3 - 9x^2 - 22$

DIVISION DE POLYNOME NON VUE.

Je vérifie mes solutions et je m'évalue : ☺ 😐 ☹